

Der Göttinger Koffer

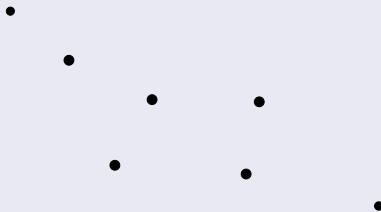
Die Konstruktion des regelmäßigen 65.537-Ecks mit Zirkel und Lineal

Holger Kammeyer

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen

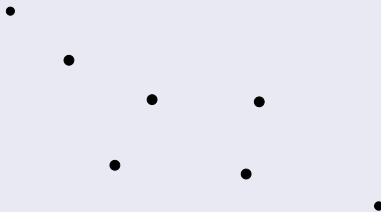
Erste Nacht des Wissens in Göttingen - 24.11.2012

Was ist eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal?



Gegeben seien Punkte in der Ebene.

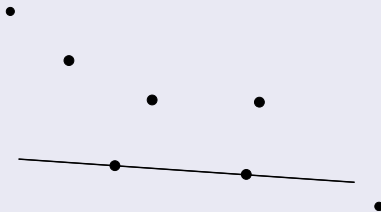
Was ist eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal?



Gegeben seien Punkte in der Ebene. Sie dürfen

- mit einem **Lineal** eine Gerade einzeichnen, auf der zwei Punkte liegen.

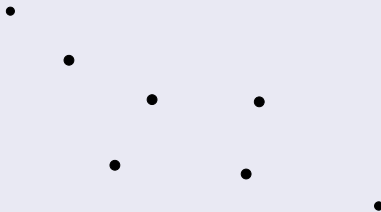
Was ist eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal?



Gegeben seien Punkte in der Ebene. Sie dürfen

- mit einem **Lineal** eine Gerade einzeichnen, auf der zwei Punkte liegen.

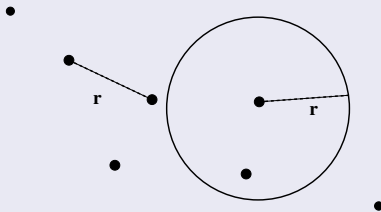
Was ist eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal?



Gegeben seien Punkte in der Ebene. Sie dürfen

- mit einem **Lineal** eine Gerade einzeichnen, auf der zwei Punkte liegen.
- mit einem **Zirkel** einen Kreis um einen Punkt schlagen, dessen Radius der Abstand zweier Punkte ist.

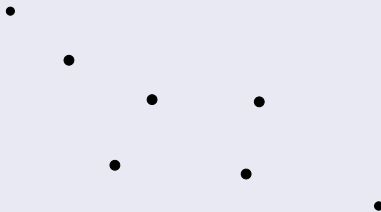
Was ist eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal?



Gegeben seien Punkte in der Ebene. Sie dürfen

- mit einem **Lineal** eine Gerade einzeichnen, auf der zwei Punkte liegen.
- mit einem **Zirkel** einen Kreis um einen Punkt schlagen, dessen Radius der Abstand zweier Punkte ist.

Was ist eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal?



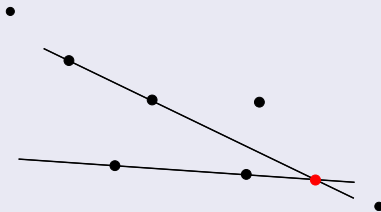
Gegeben seien Punkte in der Ebene. Sie dürfen

- mit einem **Lineal** eine Gerade einzeichnen, auf der zwei Punkte liegen.
- mit einem **Zirkel** einen Kreis um einen Punkt schlagen, dessen Radius der Abstand zweier Punkte ist.

Konstruierte Punkte

Entstehen dabei **Schnittpunkte** von

Was ist eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal?



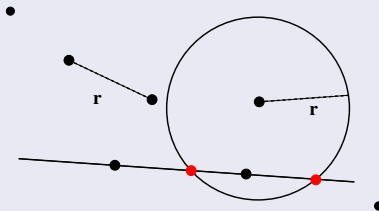
Gegeben seien Punkte in der Ebene. Sie dürfen

- mit einem **Lineal** eine Gerade einzeichnen, auf der zwei Punkte liegen.
- mit einem **Zirkel** einen Kreis um einen Punkt schlagen, dessen Radius der Abstand zweier Punkte ist.

Konstruierte Punkte

Entstehen dabei **Schnittpunkte** von **Geraden und Geraden**,

Was ist eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal?



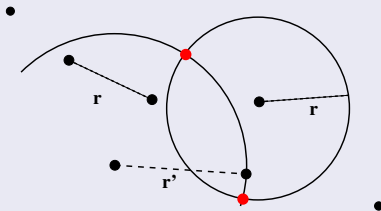
Gegeben seien Punkte in der Ebene. Sie dürfen

- mit einem **Lineal** eine Gerade einzeichnen, auf der zwei Punkte liegen.
- mit einem **Zirkel** einen Kreis um einen Punkt schlagen, dessen Radius der Abstand zweier Punkte ist.

Konstruierte Punkte

Entstehen dabei **Schnittpunkte** von **Geraden und Geraden**,
Geraden und Kreisen

Was ist eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal?



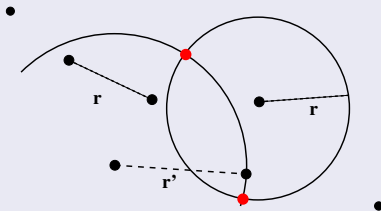
Gegeben seien Punkte in der Ebene. Sie dürfen

- mit einem **Lineal** eine Gerade einzeichnen, auf der zwei Punkte liegen.
- mit einem **Zirkel** einen Kreis um einen Punkt schlagen, dessen Radius der Abstand zweier Punkte ist.

Konstruierte Punkte

Entstehen dabei **Schnittpunkte** von **Geraden und Geraden**, **Geraden und Kreisen** oder **Kreisen und Kreisen**, so gelten diese Punkte als **konstruiert** und dürfen für neue Konstruktionen verwendet werden.

Was ist eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal?



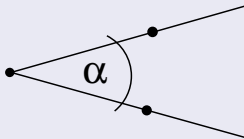
Gegeben seien Punkte in der Ebene. Sie dürfen

- mit einem **Lineal** eine Gerade einzeichnen, auf der zwei Punkte liegen.
- mit einem **Zirkel** einen Kreis um einen Punkt schlagen, dessen Radius der Abstand zweier Punkte ist.

Konstruierte Punkte

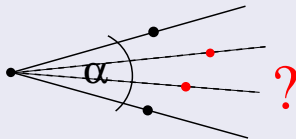
Entstehen dabei **Schnittpunkte** von **Geraden und Geraden**, **Geraden und Kreisen** oder **Kreisen und Kreisen**, so gelten diese Punkte als **konstruiert** und dürfen für neue Konstruktionen verwendet werden.

Berühmte Konstruktionsaufgaben



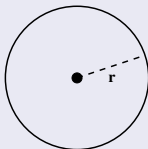
- Gegeben sei ein Winkel α . Konstruiere den Winkel $\frac{\alpha}{3}$!

Berühmte Konstruktionsaufgaben



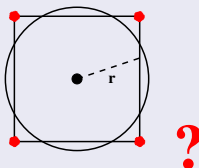
- Gegeben sei ein Winkel α . Konstruiere den Winkel $\frac{\alpha}{3}$!

Berühmte Konstruktionsaufgaben



- Gegeben sei ein Winkel α . Konstruiere den Winkel $\frac{\alpha}{3}$!
- Gegeben sei ein Kreis mit Radius r . Konstruiere ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt!

Berühmte Konstruktionsaufgaben

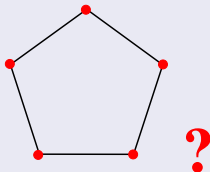


- Gegeben sei ein Winkel α . Konstruiere den Winkel $\frac{\alpha}{3}$!
- Gegeben sei ein Kreis mit Radius r . Konstruiere ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt!

5

- Gegeben sei ein Winkel α . Konstruiere den Winkel $\frac{\alpha}{3}$!
- Gegeben sei ein Kreis mit Radius r . Konstruiere ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt!
- Gegeben sei eine natürliche Zahl n . Konstruiere das regelmäßige n -Eck!

Berühmte Konstruktionsaufgaben



- Gegeben sei ein Winkel α . Konstruiere den Winkel $\frac{\alpha}{3}$!
- Gegeben sei ein Kreis mit Radius r . Konstruiere ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt!
- Gegeben sei eine natürliche Zahl n . Konstruiere das regelmäßige n -Eck!

Die Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks

Schon die alten Griechen beschäftigten sich mit Konstruktionsproblemen. Diese Tabelle gibt eine Übersicht, welche n -Ecke sie konstruieren konnten.

n				3	4	5	6	7	8	9
n -Eck konstruierbar?				ja	ja	ja	ja	?	ja	?

10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
ja	?	ja	?	?	ja	ja	?	?	...

Schon die alten Griechen beschäftigten sich mit Konstruktionsproblemen. Diese Tabelle gibt eine Übersicht, welche n -Ecke sie konstruieren konnten.

n				3	4	5	6	7	8	9
n -Eck konstruierbar?				ja	ja	ja	ja	?	ja	?
10	11	12	13	14	15	16	17	18	...	
ja	?	ja	?	?	ja	ja	?	?	...	

Danach gab es in dieser Frage etwa **2.000 Jahre** lang keinen Fortschritt.





Carl Friedrich Gauß

(* 30. April 1777 in Braunschweig, † 23. Februar 1855 in Göttingen)

Satz (Gauß, 1796)

*Das regelmäßige **Siebzehneck** ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar.*

Satz (Gauß, 1796)

*Das regelmäßige **Siebzehneck** ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar.*

“Der Tag war der 29. März 1796, und der Zufall hatte gar keinen Anteil daran. [...] Durch angestrenktes Nachdenken über den Zusammenhang aller Wurzeln untereinander nach arithmetischen Gründen glückte es mir, bei einem Ferienaufenthalt in Braunschweig am Morgen des gedachten Tages (ehe ich aus dem Bette aufgestanden war) diesen Zusammenhang auf das klarste anzuschauen, so daß ich die spezielle Anwendung auf das 17-Eck und die numerische Bestätigung auf der Stelle machen konnte.”

aus einem Brief von Gauß an Christian Ludwig Gerling (1788–1864) aus dem Jahr 1819

Nach diesem Durchbruch war die Frage nach der Konstruierbarkeit des regelmäßigen n -Ecks bald vollständig gelöst.

Nach diesem Durchbruch war die Frage nach der Konstruierbarkeit des regelmäßigen n -Ecks bald vollständig gelöst.

Satz (Gauß ~1798, Wantzel 1837)

*Sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. Das regelmäßige n -Eck ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn n von der Form $n = 2^k \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_l$ ist, wobei $p_1, \dots, p_l$ paarweise verschiedene **Fermatschen Primzahlen** bezeichnen.*

Nach diesem Durchbruch war die Frage nach der Konstruierbarkeit des regelmäßigen n -Ecks bald vollständig gelöst.

Satz (Gauß ~1798, Wantzel 1837)

*Sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. Das regelmäßige n -Eck ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn n von der Form $n = 2^k \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_l$ ist, wobei $p_1, \dots, p_l$ paarweise verschiedene **Fermatschen Primzahlen** bezeichnen.*

- Eine **Fermatsche Primzahl** ist eine Primzahl p der Form $p = 2^{2^m} + 1$.

Nach diesem Durchbruch war die Frage nach der Konstruierbarkeit des regelmäßigen n -Ecks bald vollständig gelöst.

Satz (Gauß ~1798, Wantzel 1837)

*Sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. Das regelmäßige n -Eck ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn n von der Form $n = 2^k \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_l$ ist, wobei $p_1, \dots, p_l$ paarweise verschiedene **Fermatschen Primzahlen** bezeichnen.*

- Eine **Fermatsche Primzahl** ist eine Primzahl p der Form $p = 2^{2^m} + 1$.
- Für $m = 0, 1, 2, 3$ und 4 ergeben sich $p = 3, 5, 17, 257$ und 65537 .

Nach diesem Durchbruch war die Frage nach der Konstruierbarkeit des regelmäßigen n -Ecks bald vollständig gelöst.

Satz (Gauß ~1798, Wantzel 1837)

*Sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. Das regelmäßige n -Eck ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn n von der Form $n = 2^k \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_l$ ist, wobei $p_1, \dots, p_l$ paarweise verschiedene **Fermatschen Primzahlen** bezeichnen.*

- Eine **Fermatsche Primzahl** ist eine Primzahl p der Form $p = 2^{2^m} + 1$.
- Für $m = 0, 1, 2, 3$ und 4 ergeben sich $p = 3, 5, 17, 257$ und 65537 .
- Diese fünf Zahlen sind tatsächlich Primzahlen. Ob es noch mehr Fermatsche Primzahlen gibt, ist unbekannt.

Nach diesem Durchbruch war die Frage nach der Konstruierbarkeit des regelmäßigen n -Ecks bald vollständig gelöst.

Satz (Gauß ~1798, Wantzel 1837)

*Sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. Das regelmäßige n -Eck ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn n von der Form $n = 2^k \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_l$ ist, wobei $p_1, \dots, p_l$ paarweise verschiedene **Fermatschen Primzahlen** bezeichnen.*

- Eine **Fermatsche Primzahl** ist eine Primzahl p der Form $p = 2^{2^m} + 1$.
- Für $m = 0, 1, 2, 3$ und 4 ergeben sich $p = 3, 5, 17, 257$ und 65537 .
- Diese fünf Zahlen sind tatsächlich Primzahlen. Ob es noch mehr Fermatsche Primzahlen gibt, ist unbekannt.
- Gauß zeigte, dass die Bedingung $n = 2^k \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_l$ hinreichend ist und behauptete auch die Notwendigkeit. Beweis durch *Wantzel*.

Die Tabelle der alten Griechen können wir nun vervollständigen.

n				3	4	5	6	7	8	9
n -Eck konstruierbar?				ja	ja	ja	ja	?	ja	?

10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
ja	?	ja	?	?	ja	ja	?	?	...

Die Tabelle der alten Griechen können wir nun vervollständigen.

n				3	4	5	6	7	8	9
n -Eck konstruierbar?				ja	ja	ja	ja	nein	ja	nein

10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
ja	nein	ja	nein	nein	ja	ja	ja	nein	...



Was steckt hinter dem Konstruierbarkeitssatz?

Die Lösungen der Gleichung $z^{17} - 1 = 0$ bilden ein regelmäßiges 17-Eck in der *Gaußschen Zahlenebene*. Gauß fand die x -Koordinate des ersten Punktes oberhalb der eins.

$$\frac{1}{16} \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{2(17 - \sqrt{17})} + \right. \\ \left. + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{2(17 - \sqrt{17})}} - 2\sqrt{2(17 + \sqrt{17})} \right).$$

Was steckt hinter dem Konstruierbarkeitssatz?

Die Lösungen der Gleichung $z^{17} - 1 = 0$ bilden ein regelmäßiges 17-Eck in der *Gaußschen Zahlenebene*. Gauß fand die x-Koordinate des ersten Punktes oberhalb der eins.

$$\frac{1}{16} \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{2(17 - \sqrt{17})} + \right. \\ \left. + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{2(17 - \sqrt{17})}} - 2\sqrt{2(17 + \sqrt{17})} \right).$$

Punkte, deren Koordinaten nur durch **Grundrechenarten** und **Wurzelziehen** aus ganzen Zahlen entstehen, können konstruiert werden.

tricas absolvi poterit. Ita e. g. pro $n = 17$ ex artt. 354, 361 facile pro cosinu anguli $\frac{1}{17}P$ expressio haec derivatur:

$$-\sqrt[17]{1} + \sqrt[17]{17} + \sqrt[17]{34-2\sqrt{17}} + \frac{1}{2}\sqrt[17]{(17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}})-2\sqrt[17]{34+2\sqrt{17}}}$$

cosinus multiplo rum illius anguli formam similem, sinus autem uno signo radicali plus habent. Magnopere sane est mirandum, quod, quum iam Euclidis temporibus circuli divisibilitas geometrica in tres et quinque partes nota fuerit, nihil his inventis intervallo 2000 annorum adiectum sit, omnesque geometrae tamquam certum pronuntiaverint, praeter illas sectiones casque, quae sponte inde demanant, puta sectiones in 15 , $3 \cdot 2^3$, $5 \cdot 2^3$, $15 \cdot 2^3$ nec non in 2^3 partes, nullas alias per constructiones geometricas absolvi posse. — Ceterum facile probatur, si numerus primus n sit $= 2^m + 1$, etiam exponentem m alios factores primos quam numerum 2 implicare non posse, adeoque vel $= 1$ vel $= 2$ vel altiori potestati numeri 2 aequale esse debere; si enim m per ullum numerum imparem ζ (unitate maiorem) divisibilis esset atque $m = \zeta \eta$, foret $2^m + 1$ divisibilis per $2^{\zeta} + 1$, adeoque necessario compositus. Omnes itaque valores ipsius n , pro quibus ad meras aequationes quadraticas deferimur, sub forma $2^x + 1$ continentur; ita quinque numeri 3 , 5 , 17 , 257 , 65537 prodeunt statuendo $v = 0$, 1 , 2 , 3 , 4 sive $m = 1$, 2 , 4 , 8 , 16 . Neutiquam vero pro omnibus numeris sub illa forma contentis sectio circuli geometrica perficitur, sed pro iis tantum, qui sunt numeri primi. Fermatius quidem inductione deceptus affirmaverat, omnes numeros sub illa forma contentos necessario primos esse; at ill. Euler hanc regulam iam pro $v = 5$ sive $m = 32$ erroneam esse, numero $2^{32} + 1 = 4294967297$ factorem 641 involvente, primus animadvertit.

Quoties autem $n - 1$ alios factores primos praeter 2 implicat, semper ad aequationes altiores deferimur; puta ad unam pluresve cubicas, quando 3 semel aut pluries inter factores primos ipsius $n - 1$ reperitur, ad aequationes quinti gradus, quando $n - 1$ divisibilis est per 5 etc., OMNIQUE RIGORE DEMONSTRARE POSSEMUS, HAS AEQUATIONES ELEVATAS NULLO MODO NEC EVITARI NEC AD INFERIORES REDUCI POSSE, etsi limites huius operis hanc demonstrationem hic tradere non patiantur, quod tamen monendum esse duximus, ne quis adhuc alias sectiones praeter eas, quas theoria nostra suggerit, e. g. sectiones in 7 , 11 , 13 , 19 etc. partes, ad constructiones geometricas perducere speret, tempusque inutiliter terat.

Ebenso lässt sich Z in vier Factoren zerlegen, deren Coefficienten durch die Aggregate von vier Gliedern ausgedrückt werden können, und zwar ist das Product aus zweien gleich y , das Product aus den beiden übrigen gleich y' .

Die Theilungen des Kreises, welche man mittelst quadratischer Gleichungen oder durch geometrische Constructionen ausführen kann.

365.

Wir haben somit durch die vorstehenden Untersuchungen die Theilung des Kreises in n gleiche Theile, wenn n eine Primzahl ist, auf die Auflösung von so vielen Gleichungen zurückgeführt, als die Anzahl der Factoren beträgt, in welche man die Zahl $n - 1$ zerlegen kann, und zwar bestimmt sich der Grad dieser Gleichungen durch die Grösse der Factoren. So oft daher $n - 1$ eine Potenz von 2 ist, was für die folgenden Werte von n der Fall ist: $n = 3, 5, 17, 257, 65537, \dots$ lässt sich die Theilung des Kreises auf lauter quadratische Gleichungen zurückführen, und die trigonometrischen

Functionen der Winkel $\frac{P}{n}, \frac{2P}{n}, \dots$ lassen sich durch mehr oder weniger complirte (je nach der Grösse von n) quadratische Gleichungen ausdrücken. Daher kann in diesen Fällen die Theilung des Kreises in n gleiche Theile oder die Beschreibung eines regulären Polygons von n Seiten durch geometrische Constructionen erledigt werden. Z. B. leitet man für $n = 17$ aus den Artikeln 354, 361 für den Cosinus des Winkels $\frac{1}{17}P$ leicht den folgenden Ausdruck her:

$$-\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}};$$

die Cosinus der Vielfachen jenes Winkels haben eine ähnliche Form, die Sinus aber haben ein Wurzelzeichen mehr. Es ist sicherlich sehr merkwürdig, dass, während schon zu Euclid's Zeiten die geometrische Theilbarkeit des Kreises in drei und fünf Theile bekannt war, diesen Entdeckungen im Verlauf von 2000 Jahren nichts hinzugefügt worden ist, und dass es sämtliche Geometer für sicher erklärten, dass sich ausser jenen Theilungen und denen, die ohne Weiteres daraus sich ergeben, nämlich den Theilungen in 15 , $3 \cdot 2^3$, $5 \cdot 2^3$, $15 \cdot 2^3$ sowie in 2^3 Theile, keine andern weiter durch geometrische Constructionen ausführen lassen. — Übrigens beweist man leicht, dass, wenn die Primzahl $n = 2^m + 1$ ist, auch der Exponent m keine andern Primfactoren haben darf, als die Zahl 2 , und daher entweder gleich

aus Gauß' *Disquisitiones Arithmeticae* (1801) in "Carl Friedrich Gauß - Werke, Erster Band, herausgegeben von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1863", deutsche Übersetzung herausgegeben von H. Maser (1889)

- Für die vollständige Lösung in moderner Sprache benötigt man Mittel der sogenannten *Galoistheorie* (ca. 3. Semester).

- Für die vollständige Lösung in moderner Sprache benötigt man Mittel der sogenannten *Galoistheorie* (ca. 3. Semester).
- Gauß hatte theoretisch gezeigt, dass die Konstruktion des 17-Ecks möglich ist. Eine erste praktische Anleitung wurde von *Johannes Erchinger* 1825 veröffentlicht.

Eichingers Konstruktion des Siebzenecks

Für die x -Koordinate des ersten Punktes des **257-Ecks** ergibt sich

257.nb

1

FunctionExpand[Cos[2 * π / 257]]

[illegible]

Für die x -Koordinate des ersten Punktes des **257-Ecks** ergibt sich

257.nb

FunctionExpand[Cos[2 * π / 257]]

[illegible]

Und das ist nur Seite 1 von 36. Ausdruck erstellt mit Mathematica von Dr. Bernd Winter.

Und das 65.537-Eck?

“Auf das 65.537-Eck hat Herr Prof. Hermes in Lingen 10 Jahre seines Lebens verwandt, um alle nach der Gauss’schen Behandlungsweise vorkommenden Wurzeln etc. genau zu untersuchen. Das äusserst fleissige Diarium wird in der Sammlung des mathematischen Seminars zu Göttingen aufbewahrt.”
*aus Felix Klein, “Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie”
ausgearbeitet von F. Tägert, 1895*

Johann Gustav Hermes

- * 20. Juni 1846 in Königsberg, † 08. Juni 1912 in Bad Oeynhausen.

Johann Gustav Hermes

- * 20. Juni 1846 in Königsberg, † 08. Juni 1912 in Bad Oeynhausen.
- Studium in Königsberg, 1872 Staatsexamen in Mathematik.

Johann Gustav Hermes

- * 20. Juni 1846 in Königsberg, † 08. Juni 1912 in Bad Oeynhausen.
- Studium in Königsberg, 1872 Staatsexamen in Mathematik.
- Promotion am 05. April 1879.

Johann Gustav Hermes

- * 20. Juni 1846 in Königsberg, † 08. Juni 1912 in Bad Oeynhausen.
- Studium in Königsberg, 1872 Staatsexamen in Mathematik.
- Promotion am 05. April 1879.
- Bereits seit 1873 Arbeit als Gymnasiallehrer in Königsberg, danach in Lingen und Osnabrück.

- Am 04. November 1879 beginnt Hermes mit seinem “Diarium zur Kreisteilung”, in der er die zur Konstruktion des 65.537-Ecks zugehörigen Berechnungen explizit ausführen will.

- Am 04. November 1879 beginnt Hermes mit seinem “Diarium zur Kreisteilung”, in der er die zur Konstruktion des 65.537-Ecks zugehörigen Berechnungen explizit ausführen will.
- Zehn Jahre später ist er fertig. Eine Zusammenfassung wird 1895 in den “Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, ...” veröffentlicht. Das Diarium übergibt er in einem Koffer dem Mathematischen Seminar in Göttingen.

Geduld ist die Pforte der Freude.

*Schlussworte der Einführungsrede von Johann Gustav Hermes als Direktor
am Realgymnasium Osnabrück am 11. April 1899*

- *Ein Koffer voller Zahlen*, DIE ZEIT, 16.8.2012 Nr. 34
- *Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften* (Poggendorff), Wiley-VCH
- Zirkel-und-Lineal-Animationen von Wikipedia-User Aldoaldoz, Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported license.
- Tortenfoto von Wikipedia-User PlayMistyForMe, Creative Commons-Lizenz Namensnennung 3.0 Unported